

Champs de vecteurs et formes différentielles sur une variété des points proches

Basile Guy Richard BOSSOTO⁽¹⁾, Eugène OKASSA⁽²⁾
 Université Marien NGOUABI, Faculté des Sciences,
 Département de Mathématiques
 B.P.69 - BRAZZAVILLE- (Congo)
 e-mail : ⁽¹⁾bossotob@yahoo.fr, ⁽²⁾eugeneokassa@yahoo.fr

Résumé

On considère M une variété différentielle, A une algèbre locale au sens d'André Weil, M^A la variété des points proches de M d'espèce A et $\mathfrak{X}(M^A)$ le module des champs de vecteurs sur M^A . On donne une nouvelle définition des champs de vecteurs sur M^A et on montre que $\mathfrak{X}(M^A)$ est une algèbre de Lie sur A . On étudie la cohomologie des A -formes différentielles.

Summary : Let M be a smooth manifold, A a local algebra in sense of André Weil, M^A the manifold of near points on M of kind A and $\mathfrak{X}(M^A)$ the module of vector fields on M^A . We give a new definition of vector fields on M^A and we show that $\mathfrak{X}(M^A)$ is a Lie algebra over A . We study the cohomology of A -differential forms.

Key words : Variété des points proches, algèbre locale, champs de vecteurs, A -formes différentielles.

Mathematics Subject Classification (2000) : 13H99, 58A05, 58A10.

1 Introduction

On considère une variété lisse M , A une algèbre locale (au sens d'André Weil) et M^A la variété des points proches de M d'espèce A [7]. Lorsque la variété M est de dimension n , alors M^A est une variété lisse de dimension $n \cdot \dim(A)$.

On note $C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur M , $\mathfrak{X}(M)$ le $C^\infty(M)$ -module des champs de vecteurs sur M .

Lorsque M et N sont deux variétés lisses et lorsque

$$h : M \longrightarrow N$$

est une application différentiable de classe C^∞ , alors l'application

$$h^A : M^A \longrightarrow N^A, \xi \longmapsto h^A(\xi),$$

telle que, pour tout $\varphi \in C^\infty(N)$,

$$[h^A(\xi)](\varphi) = \xi(\varphi \circ h)$$

est différentiable de classe C^∞ . Lorsque h est un difféomorphisme, il en est de même de h^A .

L'ensemble, $C^\infty(M^A, A)$, des fonctions de classe C^∞ sur M^A à valeurs dans A , est une A -algèbre commutative unitaire.

En identifiant \mathbb{R}^A à A , pour $f \in C^\infty(M)$, l'application

$$f^A : M^A \longrightarrow A, \xi \longmapsto \xi(f),$$

est de classe C^∞ . De plus l'application

$$C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), f \longmapsto f^A,$$

est un homomorphisme injectif d'algèbres. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} (f + g)^A &= f^A + g^A \\ (\lambda \cdot f)^A &= \lambda \cdot f^A \\ (f \cdot g)^A &= f^A \cdot g^A \end{aligned}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$, f et g appartenant à $C^\infty(M)$.

Lorsque $(a_\alpha)_{\alpha=1,2,\dots,\dim(A)}$ est une base de A et lorsque $(a_\alpha^*)_{\alpha=1,2,\dots,\dim(A)}$ est la base duale de la base $(a_\alpha)_{\alpha=1,2,\dots,\dim(A)}$, l'application

$$\sigma : C^\infty(M^A, A) \longrightarrow A \otimes C^\infty(M^A), \varphi \longmapsto \sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} a_\alpha \otimes (a_\alpha^* \circ \varphi),$$

est un isomorphisme de A -algèbres. Cet isomorphisme ne dépend évidemment pas de la base choisie. L'application

$$\gamma : C^\infty(M) \longrightarrow A \otimes C^\infty(M^A), f \longmapsto \sigma(f^A),$$

est un morphisme d'algèbres.

Dans toute la suite M est une variété lisse paracompacte de dimension n .

Lorsque (U, φ) est une carte locale de M de système de coordonnées locales (x_1, x_2, \dots, x_n) , l'application

$$U^A \longrightarrow A^n, \xi \longmapsto (\xi(x_1), \xi(x_2), \dots, \xi(x_n)),$$

est une bijection de U^A sur un ouvert de A^n . On vérifie que M^A est une A -variété de dimension n .

L'ensemble, $\mathfrak{X}(M^A)$, des champs de vecteurs sur M^A est à la fois un $C^\infty(M^A)$ -module et un A -module. Ce qui signifie que $\mathfrak{X}(M^A)$ est un $C^\infty(M^A, A)$ -module.

Dans ce travail, on étudie la structure de $C^\infty(M^A, A)$ -module de $\mathfrak{X}(M^A)$. De cette nouvelle approche, on construit une structure de A -algèbre de Lie sur $\mathfrak{X}(M^A)$, on définit les A -formes différentielles et on en étudie la cohomologie.

2 Structure de A -algèbre de Lie sur $\mathfrak{X}(M^A)$

2.1 Vecteurs tangents sur M^A

Pour $\xi \in M^A$, on note $T_\xi M^A$ l'espace tangent en $\xi \in M^A$ et $Der_\xi [C^\infty(M), A]$ l'ensemble des ξ -dérivations de $C^\infty(M)$ dans A c'est-à-dire l'ensemble des applications \mathbb{R} -linéaires

$$v : C^\infty(M) \longrightarrow A$$

telles que, pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$,

$$v(fg) = v(f) \cdot \xi(g) + \xi(f) \cdot v(g)$$

i.e.

$$v(fg) = v(f) \cdot g^A(\xi) + f^A(\xi) \cdot v(g).$$

Proposition 1 [2],[3] *L'application*

$$T_\xi M^A = Der_\xi [C^\infty(M^A), \mathbb{R}] \longrightarrow Der_\xi [C^\infty(M), A], v \longmapsto (id_A \otimes v) \circ \gamma,$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels .

Cet isomorphisme permet de transporter sur $T_\xi M^A$ la structure de A -module du A -module $Der_\xi [C^\infty(M), A]$.

Ainsi :

Corollaire 2 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1/ v est un vecteur tangent en $\xi \in M^A$;
- 2/ v est une application \mathbb{R} -linéaire de $C^\infty(M)$ dans A telle que, pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$,

$$v(fg) = v(f) \cdot g^A(\xi) + f^A(\xi) \cdot v(g).$$

Lorsque $\xi \in M^A$, l'application

$$\tilde{\xi} : C^\infty(M^A, A) \longrightarrow A, \varphi \longmapsto \varphi(\xi),$$

est un homomorphisme d'algèbres. On note $Der_{\tilde{\xi}} [C^\infty(M^A, A), A]$ le A -module des $\tilde{\xi}$ -dérivations de $C^\infty(M^A, A)$ dans A c'est-à-dire l'ensemble des applications \mathbb{R} -linéaires

$$w : C^\infty(M^A, A) \longrightarrow A$$

telles que, pour φ et ψ appartenant à $C^\infty(M^A, A)$,

$$w(\varphi \cdot \psi) = w(\varphi) \cdot \tilde{\xi}(\psi) + \tilde{\xi}(\varphi) \cdot w(\psi).$$

On déduit le théorème suivant :

Théorème 3 *Si*

$$v : C^\infty(M) \longrightarrow A$$

est un vecteur tangent en $\xi \in M^A$, alors il existe une $\tilde{\xi}$ -dérivation et une seule

$$\tilde{v} : C^\infty(M^A, A) \longrightarrow A$$

telle que :

- 1/ \tilde{v} est A -linéaire ;
- 2/ $\tilde{v} [C^\infty(M^A)] \subset \mathbb{R}$;
- 3/ $\tilde{v}(f^A) = v(f)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.

Démonstration: Soit

$$v : C^\infty(M) \longrightarrow A$$

un vecteur tangent en $\xi \in M^A$ et soit

$$\bar{v} : C^\infty(M^A) \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'unique dérivation telle que

$$(id_A \otimes \bar{v}) \circ \gamma = v.$$

L'application

$$\tilde{v} = (id_A \otimes \bar{v}) \circ \sigma : C^\infty(M^A, A) \longrightarrow A$$

répond à la question. ■

2.2 Champs de vecteurs sur M^A

On note $Der_\gamma [C^\infty(M), A \otimes C^\infty(M^A)]$ le $A \otimes C^\infty(M^A)$ -module des γ -dérivations de $C^\infty(M)$ dans $A \otimes C^\infty(M^A)$ i.e. l'ensemble des applications \mathbb{R} -linéaires

$$\varphi : C^\infty(M) \longrightarrow A \otimes C^\infty(M^A)$$

telles que, pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$,

$$\varphi(fg) = \varphi(f) \cdot \gamma(g) + \gamma(f) \cdot \varphi(g).$$

Une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ est une application \mathbb{R} -linéaire

$$Y : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$$

telle que, pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$,

$$Y(fg) = Y(f) \cdot g^A + f^A \cdot Y(g).$$

Ainsi une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ est une dérivation par rapport à l'homomorphisme

$$C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), f \longmapsto f^A.$$

Il s'ensuit que l'ensemble, $Der [C^\infty(M), C^\infty(M^A, A)]$, des dérivations de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ est un $C^\infty(M^A, A)$ -module.

Proposition 4 [2],[3] *L'application*

$$Der [C^\infty(M^A)] \longrightarrow Der_\gamma [C^\infty(M), A \otimes C^\infty(M^A)], X \longmapsto (id_A \otimes X) \circ \gamma,$$

est un isomorphisme de $C^\infty(M^A)$ -modules.

Il s'ensuit :

Corollaire 5 *L'application*

$$Der [C^\infty(M^A)] \longrightarrow Der [C^\infty(M), C^\infty(M^A, A)], X \longmapsto \sigma^{-1} \circ (id_A \otimes X) \circ \gamma,$$

est un isomorphisme de $C^\infty(M^A)$ -modules.

Cet isomorphisme permet de transporter sur $Der [C^\infty(M^A)]$ la structure de $C^\infty(M^A, A)$ -module de $Der [C^\infty(M), C^\infty(M^A, A)]$.

Ainsi :

Corollaire 6 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- 1/ *Un champ de vecteurs sur M^A est une section différentiable du fibré tangent (TM^A, π_{M^A}, M^A) ;*
- 2/ *Un champ de vecteurs sur M^A est une dérivation de $C^\infty(M^A)$;*
- 3/ *Un champ de vecteurs sur M^A est une dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$.*

On déduit le théorème suivant :

Théorème 7 *Si X est un champ de vecteurs sur M^A considéré comme dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$, alors il existe une dérivation et une seule*

$$\tilde{X} : C^\infty(M^A, A) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$$

telle que

- 1/ *\tilde{X} est A -linéaire ;*
- 2/ *$\tilde{X} [C^\infty(M^A)] \subset C^\infty(M^A)$;*
- 3/ *$\tilde{X}(f^A) = X(f)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$.*

Démonstration: Si X est un champ de vecteurs sur M^A considéré comme dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ et si

$$\overline{X} : C^\infty(M^A) \longrightarrow C^\infty(M^A)$$

est l'unique dérivation telle que

$$\sigma^{-1} \circ (id_A \otimes \overline{X}) \circ \gamma = X,$$

alors l'application

$$\tilde{X} = \sigma^{-1} \circ (id_A \otimes \overline{X}) \circ \sigma : C^\infty(M^A, A) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$$

répond à la question. ■

Remarque 8 Si X est un champ de vecteurs sur M^A considéré comme dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$, alors \tilde{X} s'annule sur A .

Proposition 9 Si $\mu : A \longrightarrow A$ est un endomorphisme, $f \in C^\infty(M)$ et $X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$ un champ de vecteurs sur M^A , alors

$$\tilde{X}(\mu \circ f^A) = \mu \circ X(f).$$

Démonstration: De $\tilde{X}(f^A) = X(f)$, on a

$$\tilde{X} \left[\sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} (a_\alpha^* \circ f^A) \cdot a_\alpha \right] = \sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} (a_\alpha^* \circ X(f)) \cdot a_\alpha.$$

Ce qui donne

$$\sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} \tilde{X}(a_\alpha^* \circ f^A) \cdot a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} (a_\alpha^* \circ X(f)) \cdot a_\alpha.$$

Ainsi $\tilde{X}(a_\alpha^* \circ f^A) = (a_\alpha^* \circ X(f))$ pour tout $(a_\alpha^*)_{i=1,2,\dots,\dim(A)}$. Comme

$$\mu \circ f^A = \sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} (a_\alpha^* \circ f^A) \cdot \mu(a_\alpha),$$

on déduit que

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\mu \circ f^A) &= \sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} \tilde{X}(a_\alpha^* \circ f^A) \cdot \mu(a_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\dim(A)} (a_\alpha^* \circ X(f)) \cdot \mu(a_\alpha) \\ &= \mu \circ X(f). \end{aligned}$$

D'où l'assertion. ■

Théorème 10 Si X et Y sont deux champs de vecteurs sur M^A considérés comme dérivations de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$, alors le crochet

$$[X, Y] = \tilde{X} \circ Y - \tilde{Y} \circ X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$$

est un champ de vecteurs sur M^A .

Démonstration: L'application est manifestement \mathbb{R} -linéaire. Pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned}
[X, Y](fg) &= \tilde{X}[Y(fg)] - \tilde{Y}[X(fg)] \\
&= \tilde{X}[Y(f) \cdot g^A + f^A \cdot Y(g)] \\
&\quad - \tilde{Y}[X(f) \cdot g^A + f^A \cdot X(g)] \\
&= \tilde{X}[Y(f)] \cdot g^A + Y(f) \cdot \tilde{X}(g^A) + \tilde{X}(f^A) \cdot Y(g) + f^A \cdot \tilde{X}[Y(g)] \\
&\quad - \tilde{Y}[X(f)] \cdot g^A - X(f) \cdot \tilde{Y}(g^A) - \tilde{Y}(f^A) \cdot X(g) - f^A \cdot \tilde{Y}[X(g)] \\
&= \tilde{X}[Y(f)] \cdot g^A + Y(f) \cdot X(g) + X(f) \cdot Y(g) + f^A \cdot \tilde{X}[Y(g)] \\
&\quad - \tilde{Y}[X(f)] \cdot g^A - X(f) \cdot Y(g) - Y(f) \cdot X(g) - f^A \cdot \tilde{Y}[X(g)] \\
&= (\tilde{X}[Y(f)] - \tilde{Y}[X(f)]) \cdot g^A + f^A \cdot (\tilde{X}[Y(g)] - \tilde{Y}[X(g)]) \\
&= (\tilde{X} \circ Y - \tilde{Y} \circ X)(f) \cdot g^A + f^A \cdot (\tilde{X} \circ Y - \tilde{Y} \circ X)(g) \\
&= [X, Y](f) \cdot g^A + f^A \cdot [X, Y](g).
\end{aligned}$$

D'où l'assertion. ■

Proposition 11 Si X et Y sont deux champs de vecteurs sur M^A considérés comme dérivations de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ et si $\varphi \in C^\infty(M^A, A)$, alors

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}$$

et

$$\widetilde{\varphi \cdot X} = \varphi \cdot \tilde{X}.$$

Démonstration: Pour $f \in C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned}
[\tilde{X}, \tilde{Y}](f^A) &= \tilde{X}[\tilde{Y}(f^A)] - \tilde{Y}[\tilde{X}(f^A)] \\
&= \tilde{X}[Y(f)] - \tilde{Y}[X(f)] \\
&= (\tilde{X} \circ Y - \tilde{Y} \circ X)(f) \\
&= [X, Y](f).
\end{aligned}$$

Comme $\widetilde{[X, Y]}$ est l'unique dérivation de $C^\infty(M^A, A)$ telle que $\widetilde{[X, Y]}(f^A) = [X, Y](f)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$, on déduit que

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \widetilde{[X, Y]}.$$

De même

$$\begin{aligned}
(\varphi \cdot \tilde{X})(f^A) &= \varphi \cdot (\tilde{X})(f^A) \\
&= \varphi \cdot X(f) \\
&= (\varphi \cdot X)(f).
\end{aligned}$$

Comme $\widetilde{\varphi \cdot X}$ est l'unique dérivation de $C^\infty(M^A, A)$ telle que $(\widetilde{\varphi \cdot X})(f^A) = (\varphi \cdot X)(f)$ pour tout $f \in C^\infty(M)$, on déduit que

$$\widetilde{\varphi \cdot X} = \varphi \cdot \widetilde{X}.$$

D'où les deux assertions. ■

Proposition 12 *Si $\varphi \in C^\infty(M^A, A)$, si X et Y sont deux champs de vecteurs sur M^A considérés comme dérivations de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$, alors*

$$[X, \varphi \cdot Y] = \widetilde{X}(\varphi) \cdot Y + \varphi \cdot [X, Y].$$

La démonstration ne présente aucune difficulté.

Théorème 13 *L'application*

$$\mathfrak{X}(M^A) \times \mathfrak{X}(M^A) \longrightarrow \mathfrak{X}(M^A), (X, Y) \longmapsto [X, Y],$$

est A -bilinéaire alternée et définit une structure de A -algèbre de Lie sur $\mathfrak{X}(M^A)$.

Démonstration: Lorsque X est un champ de vecteurs sur M^A considéré comme dérivation de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$ et lorsque $a \in A$, on a

$$[X, a \cdot Y] = \widetilde{X}(a) \cdot Y + a \cdot [X, Y].$$

Comme \widetilde{X} s'annule sur A , il s'ensuit que l'application

$$\mathfrak{X}(M^A) \times \mathfrak{X}(M^A) \longrightarrow \mathfrak{X}(M^A), (X, Y) \longmapsto [X, Y]$$

est A -bilinéaire alternée.

Pour tous champs de vecteurs X, Y, Z sur M^A considérés comme dérivations de $C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M^A, A)$, on a :

$$\begin{aligned} & [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \\ = & \widetilde{X} \circ [Y, Z] - \widetilde{[Y, Z]} \circ X \\ & + \widetilde{Y} \circ [Z, X] - \widetilde{[Z, X]} \circ Y \\ & + \widetilde{Z} \circ [X, Y] - \widetilde{[X, Y]} \circ Z \\ = & \widetilde{X} \circ (\widetilde{Y} \circ Z - \widetilde{Z} \circ Y) - [\widetilde{Y}, \widetilde{Z}] \circ X \\ & + \widetilde{Y} \circ (\widetilde{Z} \circ X - \widetilde{X} \circ Z) - [\widetilde{Z}, \widetilde{X}] \circ Y \\ & + \widetilde{Z} \circ (\widetilde{X} \circ Y - \widetilde{Y} \circ X) - [\widetilde{X}, \widetilde{Y}] \circ Z \\ = & \widetilde{X} \circ \widetilde{Y} \circ Z - \widetilde{X} \circ \widetilde{Z} \circ Y - \widetilde{Y} \circ \widetilde{Z} \circ X + \widetilde{Z} \circ \widetilde{Y} \circ X \\ & + \widetilde{Y} \circ \widetilde{Z} \circ X - \widetilde{Y} \circ \widetilde{X} \circ Z - \widetilde{Z} \circ \widetilde{X} \circ Y + \widetilde{X} \circ \widetilde{Z} \circ Y \\ & + \widetilde{Z} \circ \widetilde{X} \circ Y - \widetilde{Z} \circ \widetilde{Y} \circ X - \widetilde{X} \circ \widetilde{Y} \circ Z + \widetilde{Y} \circ \widetilde{X} \circ Z \\ = & 0. \end{aligned}$$

D'où l'assertion. ■

Remarque 14 En considérant $\mathfrak{X}(M^A)$ uniquement comme module sur $C^\infty(M^A)$, $\mathfrak{X}(M^A)$ ne peut être une algèbre de Lie sur A .

Corollaire 15 L'application

$$\mathfrak{X}(M^A) \longrightarrow \text{Der} [C^\infty(M^A, A)], X \longmapsto \tilde{X},$$

est à la fois un morphisme de $C^\infty(M^A, A)$ -modules et un morphisme de A -algèbres de Lie.

2.2.1 Prolongements à M^A des champs de vecteurs sur M

Proposition 16 Si

$$\theta : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

est un champ de vecteurs sur M , alors l'application

$$\theta^A : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), f \longmapsto [\theta(f)]^A,$$

est un champ de vecteurs sur M^A .

Démonstration: L'application θ^A est manifestement \mathbb{R} -linéaire. Pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$, on a :

$$\begin{aligned} \theta^A(fg) &= [\theta(fg)]^A \\ &= [\theta(f) \cdot g + f \cdot \theta(g)]^A \\ &= [\theta(f)]^A \cdot g^A + f^A \cdot [\theta(g)]^A \\ &= \theta^A(f) \cdot g^A + f^A \cdot \theta^A(g). \end{aligned}$$

Ainsi θ^A est un champ de vecteurs sur M^A . ■

On dit que le champ de vecteurs θ^A est le prolongement à M^A du champ de vecteurs θ sur M .

Proposition 17 Si θ , θ_1 et θ_2 sont des champs de vecteurs sur M et si $f \in C^\infty(M)$, alors

$$\begin{aligned} (\theta_1 + \theta_2)^A &= \theta_1^A + \theta_2^A; \\ (f \cdot \theta)^A &= f^A \cdot \theta^A; \\ \widetilde{(f \cdot \theta)^A} &= f^A \cdot \widetilde{\theta^A}; \\ [\theta_1^A, \theta_2^A] &= [\theta_1, \theta_2]^A. \end{aligned}$$

et l'application

$$\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \text{Der} [C^\infty(M^A, A)], \theta \longmapsto \widetilde{\theta^A},$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie réelles.

La démonstration ne présente aucune difficulté.

2.2.2 Champs de vecteurs sur M^A provenant des dérivations de A

Proposition 18 *Si d est une dérivation de A , alors l'application*

$$d^* : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M^A, A), f \longmapsto (-d) \circ f^A,$$

est un champ de vecteurs sur M^A .

Démonstration: On vérifie que l'application d^* est \mathbb{R} -linéaire. Pour f et g appartenant à $C^\infty(M)$ et pour $\xi \in M^A$, on a :

$$\begin{aligned} d^*(fg)(\xi) &= (-d) \circ (fg)^A(\xi) \\ &= (-d) \circ (f^A \cdot g^A)(\xi) \\ &= (-d) [f^A(\xi) \cdot g^A(\xi)] \\ &= (-d) [f^A(\xi)] \cdot g^A(\xi) + f^A(\xi) \cdot (-d) [g^A(\xi)] \\ &= [(-d) \circ f^A](\xi) \cdot g^A(\xi) + f^A(\xi) \cdot [(-d) \circ g^A](\xi) \\ &= ([(-d) \circ f^A] \cdot g^A + f^A \cdot [(-d) \circ g^A])(\xi) \\ &= [d^*(f) \cdot g^A + f^A \cdot d^*(g)](\xi). \end{aligned}$$

Comme ξ est quelconque, on déduit que

$$d^*(fg) = d^*(f) \cdot g^A + f^A \cdot d^*(g).$$

Ainsi, d^* est un champ de vecteurs sur M^A . ■

On dit que le champ de vecteurs d^* est le champ de vecteurs sur M^A associé à la dérivation d de A .

On a les résultats suivants :

Proposition 19 *Si d_1, d_2, d sont trois dérivations de A , a un élément de A et $\theta : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ un champ de vecteurs sur M , alors*

$$\begin{aligned} [d_1^*, d_2^*] &= [d_1, d_2]^* ; \\ (a \cdot d)^* &= a \cdot d^* ; \\ [d^*, \theta^A] &= 0. \end{aligned}$$

Démonstration: La démonstration des deux premières assertions ne présente aucune difficulté.

Pour la dernière assertion, lorsque $f \in C^\infty(M)$ on a

$$\begin{aligned} [d^*, \theta^A](f) &= (\widetilde{d^*} \circ \theta^A - \widetilde{\theta^A} \circ d^*)(f) \\ &= (\widetilde{d^*} \circ \theta^A)(f) - (\widetilde{\theta^A} \circ d^*)(f) \\ &= (\widetilde{d^*})[\theta^A(f)] - (\widetilde{\theta^A})[d^*(f)] \\ &= (\widetilde{d^*})([\theta(f)]^A) - (\widetilde{\theta^A})[d^*(f)] \\ &= d^*[\theta(f)] + (\widetilde{\theta^A})[d \circ f^A] \\ &= (-d) \circ [\theta(f)]^A + (\widetilde{\theta^A})[d \circ f^A]. \end{aligned}$$

Compte tenu de la proposition 9, on a

$$(\widetilde{\theta^A}) [d \circ f^A] = d \circ \theta^A(f).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} [d^*, \theta^A](f) &= (-d) \circ [\theta(f)]^A + (\widetilde{\theta^A}) [d \circ f^A] \\ &= (-d) \circ \theta^A(f) + d \circ \theta^A(f) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme f est quelconque, on déduit que $[d^*, \theta^A] = 0$. ■

3 A -formes différentielles

Un A -covecteur en $\xi \in M^A$ est une forme linéaire sur le A -module $T_\xi M^A$. L'ensemble, $T_\xi^* M^A$, des A -covecteurs en $\xi \in M^A$ est un A -module libre de dimension n et

$$T^* M^A = \bigcup_{\xi \in M^A} T_\xi^* M^A$$

est une A -variété de dimension $2n$. L'ensemble, $\Lambda^1(M^A, A)$, des sections différentiables de $T^* M^A$ est un $C^\infty(M^A, A)$ -module et on dit que $\Lambda^1(M^A, A)$ est le $C^\infty(M^A, A)$ -module des A -formes différentielles de degré 1.

Pour $p \in \mathbb{N}$ et pour $\xi \in M^A$, on note $\mathcal{L}_{alt}^p(T_\xi M^A, A)$ le A -module des formes multilinéaires alternées de degré p sur le A -module $T_\xi M^A$. On a évidemment

$$\mathcal{L}_{alt}^0(T_\xi M^A, A) = A.$$

Comme dans le cas réel, pour deux entiers p et q , on définit le produit extérieur

$$\Lambda : \mathcal{L}_{alt}^p(T_\xi M^A, A) \times \mathcal{L}_{alt}^q(T_\xi M^A, A) \longrightarrow \mathcal{L}_{alt}^{p+q}(T_\xi M^A, A), (\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \wedge \beta.$$

L'ensemble

$$A^p(T^* M^A, A) = \bigcup_{\xi \in M^A} \mathcal{L}_{alt}^p(T_\xi M^A, A)$$

est une A -variété de dimension $n + C_n^p$. L'ensemble, $\Lambda^p(M^A, A)$, des sections différentiables de $A^p(T^* M^A, A)$ est un $C^\infty(M^A, A)$ -module. On dit que $\Lambda^p(M^A, A)$ est le $C^\infty(M^A, A)$ -module des A -formes différentielles de degré p sur M^A et que

$$\Lambda(M^A, A) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p(M^A, A)$$

est l'algèbre des A -formes différentielles sur M^A . L'algèbre $\Lambda(M^A, A)$ des A -formes différentielles sur M^A est canoniquement isomorphe à $A \otimes \Lambda(M^A)$. On a

$$\Lambda^0(M^A, A) = C^\infty(M^A, A).$$

Théorème 20 [1],[4] Si η est une A -forme différentielle de degré p sur M^A , alors il existe une A -forme différentielle de degré p et une seule

$$\eta^A : \mathfrak{X}(M^A) \times \mathfrak{X}(M^A) \times \dots \times \mathfrak{X}(M^A) \longrightarrow C^\infty(M^A, A)$$

telle que, pour p champs de vecteurs $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ sur M et pour p fonctions f_1, f_2, \dots, f_p sur M ,

$$\eta^A(f_1^A \cdot \theta_1^A, f_2^A \cdot \theta_2^A, \dots, f_p^A \theta_p^A) = f_1^A \cdot f_2^A \cdot \dots \cdot f_p^A \cdot [\eta(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)]^A.$$

Lorsque η est une forme différentielle sur M , la A -forme différentielle η^A est le prolongement à M^A de la forme différentielle η .

3.1 La d^A -cohomologie

L'application

$$\Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M^A, A), \omega \longmapsto \omega^A,$$

est un morphisme de \mathbb{R} -algèbres graduées.

Si

$$d : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M)$$

est l'opérateur de différentiation extérieure, en notant

$$d^A : \Lambda(M^A, A) \longrightarrow \Lambda(M^A, A)$$

l'opérateur de cohomologie associé à la représentation

$$\mathfrak{X}(M^A) \longrightarrow \text{Der} [C^\infty(M^A, A)], X \longmapsto \tilde{X}.$$

Proposition 21 L'application

$$d^A : \Lambda(M^A, A) \longrightarrow \Lambda(M^A, A)$$

est A -linéaire et

$$d^A(\omega^A) = (d\omega)^A$$

pour tout $\omega \in \Lambda(M)$.

Démonstration: On vérifie que d^A est A -linéaire. Si $\omega \in \Lambda^p(M)$, pour

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p+1}$ champs de vecteurs sur M , on a

$$\begin{aligned}
& [d^A(\omega^A)](\theta_1^A, \theta_2^A, \dots, \theta_{p+1}^A) \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \widetilde{\theta_i^A} \left[\omega^A(\theta_1^A, \theta_2^A, \dots, \widehat{\theta_i^A}, \dots, \theta_{p+1}^A) \right] \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \omega^A([\theta_i^A, \theta_j^A], \theta_1^A, \dots, \widehat{\theta_i^A}, \dots, \widehat{\theta_j^A}, \dots, \theta_{p+1}^A) \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \widetilde{\theta_i^A} \left[(\omega(\theta_1, \theta_2, \dots, \widehat{\theta_i}, \dots, \theta_{p+1}))^A \right] \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} (\omega([\theta_i, \theta_j], \theta_1, \dots, \widehat{\theta_i}, \dots, \widehat{\theta_j}, \dots, \theta_{p+1}))^A \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \theta_i^A \left[\omega(\theta_1, \theta_2, \dots, \widehat{\theta_i}, \dots, \theta_{p+1}) \right] \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} (\omega([\theta_i, \theta_j], \theta_1, \dots, \widehat{\theta_i}, \dots, \widehat{\theta_j}, \dots, \theta_{p+1}))^A \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \left(\theta_i \left[\omega(\theta_1, \theta_2, \dots, \widehat{\theta_i}, \dots, \theta_{p+1}) \right] \right)^A \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} (\omega([\theta_i, \theta_j], \theta_1, \dots, \widehat{\theta_i}, \dots, \widehat{\theta_j}, \dots, \theta_{p+1}))^A \\
&= (d\omega)^A(\theta_1^A, \theta_2^A, \dots, \theta_{p+1}^A) \\
&= [(d\omega)(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{p+1})]^A.
\end{aligned}$$

Compte tenu du théorème 20, on déduit que $d^A(\omega^A) = (d\omega)^A$. ■

L'application

$$A \times \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(M^A, A), (a, \omega) \longmapsto a \cdot \omega^A$$

est \mathbb{R} -bilinéaire et induit un morphisme du complexe différentiel $(A \otimes \Lambda(M), id_A \otimes d)$ dans le complexe différentiel $(\Lambda(M^A, A), d^A)$.

On note $H_{dR}(M)$ la cohomologie de de Rham de la variété différentielle M et $H(M^A, A)$ la cohomologie du complexe différentiel $(\Lambda(M^A, A), d^A)$.

On dit que $H(M^A, A)$ est la d^A -cohomologie sur la variété des points proches M^A . Les espaces $A \otimes H_{dR}^p(M^A)$ et $H^p(M^A, A)$ sont canoniquement isomorphes.

En particulier si la variété M^A est connexe, alors l'espace $H^0(M^A, A)$ s'identifie canoniquement à A .

Références

- [1] A. Morimoto, Prolongation of connections to bundles of infinitely near points, J.Diff.Geom., t.11, 1976, p. 479-498.

- [2] E. Okassa, Prolongements des champs de vecteurs à des variétés des points proches, C.R. Acad. Sc. Paris, t.300, Série I, n° 6, 1985, p.173-176.
- [3] E. Okassa, Prolongement des champs de vecteurs à des variétés des points proches, Annales Faculté des Sciences de Toulouse, Vol. VIII, n° 3, 1986-1987, 349-366.
- [4] E. Okassa, Relèvements des structures symplectiques et pseudo-riemanniennes à des variétés des points proches, Nagoya Math. J., Vol.115 (1989), 63-71.
- [5] K. Yano and S. Ishihara, Tangent and cotangent bundles, Diff. Geom. Marcel Dekker, New-York, 1973.
- [6] K. Yano and E.M. Patterson, Vertical and complete lifts from a manifold to its cotangent bundles, Jour. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 91-113.
- [7] A. Weil, Théorie des points proches sur les variétés différentiables, Colloque Géom. Diff. Strasbourg, 1953, 111-117.